GdT Borel

Notations G groupe de Lie réel semi-simple connexe centre fini

$K \subset G$ sous-gpe compact maximal

$X = K \backslash G \curvearrowleft G$

$I_G = \Omega_X^G \simeq H^*(\underline{g}, \underline{k})$

Γ sous-groupe discret de G

G/Γ compact

$R \to C^\infty(G/\Gamma)$

Prop :

$$\begin{tikzcd} I_G^* \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "j"'] & H^*(\underline{g}, \underline{k}) \arrow[d, "\text{injective si } G/\Gamma \text{ compact}"] \\ H^*(\Omega_X^\Gamma) \arrow[r, "\simeq"] & H^*(\underline{g}, \underline{k}, C^\infty(G/\Gamma)) \end{tikzcd}$$

But. comparer $H^*(\Omega^\Gamma_X)$ et $H^*(\Gamma,\mathbb{R})$

$$\begin{array}{c} \| \\ H^*(X/\Gamma,\mathbb{R}) \end{array}$$

Prop Γ agit proprement sur $X = K\backslash G$.

Dém. On veut : $\forall$ C compact de X, $\{\gamma\in\Gamma,\ C\gamma\cap C\neq\emptyset\}$ est fini.

Lemme. 1) $\pi : G \longrightarrow X$ est ouverte

2) $\pi : G\longrightarrow X$ est propre.

$C\subset X$ compact, $\gamma\in\Gamma$ t.q. $C\gamma\cap C\neq\emptyset$

$\pi^{-1}(C\gamma)\cap\pi^{-1}(C)\neq 0 \Rightarrow \gamma\in \underbrace{\pi^{-1}(C)^{-1}\cdot\pi^{-1}(C)}_{\text{compact}}$ $\square$.

Prop. Si Γ est sans torsion, alors Γ agit librement sur X.

Dém. Soit $x = Kg \in X$, et $\gamma \in \Gamma$

$$x\gamma = x \Leftrightarrow Kg\gamma = Kg \Leftrightarrow \gamma \in g^{-1}Kg$$

$\Rightarrow \mathrm{Stab}(x)$ est fini, donc trivial. $\square$.

Prop. Si Γ agit librement sur X, alors

$$\pi_1(X/\Gamma) \simeq \Gamma \quad \text{et} \quad \pi_n(X/\Gamma) = 0 \quad \forall n \geq 2$$

Dém. $X \longrightarrow X/\Gamma$ est un revêtement de groupe Γ.

X contractile, donc c'est le revêtement universel

$$\overbrace{\pi_2(X)}^{0} \to \pi_2(X/\Gamma) \to \overbrace{\pi_1(\Gamma)}^{0} \to \overbrace{\pi_1(X)}^{0} \to \pi_1(X/\Gamma) \to \overbrace{\pi_0(\Gamma)}^{\Gamma} \to 0$$

$\square$

Déf. Un $K(\Gamma,1)$ est un CW-complexe connexe Y tq.

$$\pi_1(Y) \simeq \Gamma \text{ et } \underline{\forall n \geq 2,\ \pi_n(Y) = 0}.$$

Rq. De manière équivalente : $\Leftrightarrow$ $\tilde{Y}$ contractile

Thm Soit Y un $K(\Gamma,1)$. Alors pour tout groupe abélien M, on a $H^*(\Gamma, M) \simeq H^*(Y, M)$.

Dém.

$$\begin{array}{c} \tilde{Y} \\ \downarrow \Gamma \\ Y \end{array}$$

revêtement universel

Γ agit librement sur $\tilde{Y}$ donc librement sur l'ensemble des simplexes $\Delta_n \to \tilde{Y}$

Donc $C_n(\tilde{Y})$ est un $\mathbb{Z}\Gamma$-module libre.

$$\cdots \longrightarrow C_2(\tilde{Y}) \to C_1(\tilde{Y}) \to C_0(\tilde{Y}) \to \mathbb{Z} \to 0$$

résolution libre de $\mathbb{Z}$.

On applique $\mathrm{Hom}_\Gamma(-, M)$

<u>Lemme</u>. $\mathrm{Hom}_\Gamma(C_n(\tilde{Y}), M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n(Y), M)$

<u>Dém</u>. $\{\text{simplexes de } \tilde{Y}\}/\Gamma \simeq \{\text{simplexes de } Y\}$

$$\sigma \longmapsto \tau = \pi \circ \sigma$$

$$\tilde{\tau} \longleftarrow \tau$$

Thm. Si Γ est un sous-groupe discret de G, alors

$$H^*(\Gamma,\mathbb{R}) \simeq H^*_{sing}(X/\Gamma,\mathbb{R})$$

Dém. On vient de le voir si Γ agit librement.

Cas général : (cf. Grothendieck, Tohoku 5.3.1)

$$E_2^{p,q} = H^p(\Gamma, \underbrace{H^q(X,\mathbb{R})}_{=0 \text{ si } q>0}) \Rightarrow H^{p+q}(X/\Gamma,\mathbb{R})$$

$\square$.

Thm $H^*_{sing}(X/\Gamma,\mathbb{R}) \simeq H^*(\Omega_X^\Gamma)$

<u>Dém.</u> • Si Γ agit librement, X/Γ est une variété

Thm de de Rham $H^*_{sing}(X/\Gamma, \mathbb{R}) \simeq H^*_{dR}(X/\Gamma, \mathbb{R})$

$$\Omega^\cdot_{X/\Gamma} \xrightarrow{\simeq} (\Omega^\cdot_X)^\Gamma$$
$$\omega \longmapsto \pi^*\omega$$

• Cas général (cf. Borel-Wallach $\underline{\mathrm{VII}}$. 2.2) $\square$.

Résumé : $H^*(\Gamma, \mathbb{R}) \simeq H^*_{sing}(X/\Gamma, \mathbb{R}) \simeq H^*(\Omega^\Gamma_X)$

$$I_G = \Omega^G_X \longrightarrow (\Omega^\Gamma_X)^{d=0} \longrightarrow H^*(\Omega^\Gamma_X) \simeq H^*(\Gamma, \mathbb{R})$$

Version à coefficients

<u>Thm.</u> Soit M un $R\Gamma$-module. Alors

$$H^*(\Gamma, M) \simeq H^*(X/\Gamma, \underline{M}) \simeq H^*\left((\Omega_X \otimes_R M)^\Gamma\right)$$

$$\begin{array}{c} (X \times \overbrace{M}^{\text{top. discrète}})/\Gamma \\ p \Big\downarrow \\ X/\Gamma \end{array}$$

$\underline{M}$ = faisceau des sections de p

Si Γ agit trivialement, $\underline{M}$ est le faisceau constant associé à M.

$$\{R\Gamma\text{-modules}\} \xleftrightarrow{\ \simeq\ } \{R\text{-systèmes locaux sur } X/\Gamma\}$$

Lemme de Selberg

Soit Γ un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ de type fini. Alors Γ possède un sous-groupe distingué Γ' d'indice fini sans torsion.

Rq. Si $G/\mathbb{Q}$ groupe alg. linéaire semi-simple, $G = G_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$

$\Gamma \subset G$ sous-groupe arithmétique

$\Longrightarrow$ Γ réseau (i.e. $\mathrm{vol}(G/\Gamma) < \infty$)

$\Longrightarrow$ Γ de type fini

G groupe affine $/ \mathcal{O}_F$, F corps de nombres

$\Gamma = \ker(G(\mathcal{O}_F) \to G(\mathcal{O}_F/3))$ est sans torsion.